RUBINI-POLIGONI DERIVATI

PROPRIETÀ D'UNA MANIERA DI POLIGONI DERIVATI

NOTA

DI R. RUBINI

Estratta dagli Annali di Matematica pura ed applicata tom. V.

ROMA
COI TIPI DELLA S. C. DE PROPAGANDA FIDE
1863.

PROPRIETA' D'UNA MANIERA DI POLIGONI DERIVATI

Sin dal **1854** il chiar: prof:. Padula nel vol. V degli *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche* (pag. **286**) enunziò alquanti teoremi intorno a una maniera di poligoni *derivati* da un poligono dato: noi, per semplice esercizio, cercammo dimostrarli, senza pretendere di pubblicare le nostre dimostrazioni. Riandando ora sul medesimo argomento, ci siamo avvceduti dell'analogia di quei teoremi con altri che si riferiscono a poligoni altrimenti derivati; e, variando la forma di derivazione, siamo giunti ad altre proprietà. Ciò ha dato luogo alla presente nota.

§. I.

Abbiansi in un piano un poligono P una retta R e un punto A: sia M_k un vertice qualunque del poligono, da esso si conduca una parallela ad R, e su quella parallela si tagli una porzione M_kN_k proporzionale alla distanza AM_k tra il punto A e il vertice M_k. Prendendo le distanze M_kN_k sempre da un medesimo lato, i punti N_k saranno i vertici d'un nuovo poligono P, che diremo *derivato* dal poligono P, il quale chiameremo *derivante*; mentre diremo *direttrice* la retta R, e *centro di derivazione* il punto A.

Posto ciò, rispetto a un qualunque sistema di assi ortogonali dinotiamo con

x_k, y_k le coordinate del vertice M_k;

t_k, u_k le coordinate del vertice N_k corrispondente di M_k;

α, β le coordinate del centro A;

poniamo $OM_k = d_k$; $OA = \delta$, essendo O l'origine delle coordinate.

Sia inoltre

$$(1) \qquad y = \lambda x + \mu$$

l'equazione della direttrice: quella della retta che passa pe'vertici corrispondenti M_k, N_k sarà

$$(2) \qquad y = \lambda x + \mu_k ;$$

e sarà inoltre

$$(3) \quad M_kN_k = (x_k - t_k)\sqrt{1+\lambda^2} = \frac{x_k - t_k}{\cos\varphi} = (y_k - u_k)\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda} = \frac{y_k - u_k}{\operatorname{sen}\varphi},$$

essendo $\tang \varphi = \lambda$.

Similmente

(4) $\overline{AM}^2 = (x_k - \alpha)^2 + (y_k - \beta)^2 = d_k^2 + \delta^2 - 2\,\alpha x_k - 2\beta y_k;$

e dinotando con r una costante, che, per l'omogeneità, supporremo essere una retta avremo per la soprascritta legge di derivazione

$$rM_kN_k = \overline{AM}_k^2. \tag{5}$$

Per brevità di linguaggio chiameremo *ragione di derivazione* la costante r.

Ora in virtù di queste equazioni (3), (4) e (5), deduciamo:

$$\begin{cases} t_k = x_k - \dfrac{1}{a}(d_k^2 + \delta^2 - 2\alpha x_k - 2\beta y_k)\,, \\ u_k = y_k - \dfrac{1}{b}(d_k^2 + \delta^2 - 2\alpha x_k - 2\,\beta y_k), \end{cases} \tag{6}$$

avendo messo per semplicità

$$r\sqrt{1+\lambda^2} = \frac{r}{\cos\varphi} = a\,; \qquad r\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda} = \frac{r}{\operatorname{sen}\varphi} = b; \tag{7}$$

e però l'equazione (1) della direttrice può essere scritta ancora così:

$$y = \frac{a}{b}x + \mu\,. \tag{8}$$

Finalmente dinotando con S la superficie del poligono derivante P, e con S' quello del poligono derivato P', avremo:

$$S = \pm \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n}(y_{k+1} - y_{k-1})\,x_k = \mp \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n}(x_{k+1} - x_{k-1})y_k\,; \tag{9}$$

$$S' = \pm \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n}(u_{k+1} - u_{k-1})t_k\,; \tag{10}$$

avvertendo che n rappresenta il numero dei lati del poligono, e che pel valore $k=1$ l'indice corrispondente zero devesi mutare in n; e per $k=n$ il corrispondente indice $n+1$ devesi mutare in 1.

§. II.

Ponendo in (10) in luogo delle u e t i corrispondenti valori tratti dalla (6), e tenendo presenti la (9) e le seguenti formole:

$$\sum_{k=1}^{k=n}(y_{k+1} - y_{k-1}) = \sum_{k=1}^{k=n}(x_{k+1} - x_{k-1}) = 0\,;$$

$$\sum_{k=1}^{k=n}(y_{k+1} - y_{k-1})\,y_k = \sum_{k=1}^{k=n}(x_{k+1} - x_{k-1})x_k = 0\,;$$

$$\sum_{k=1}^{k=n}(d_{k+n}^2 - d_{k-1}^2)x_k = -\sum_{k=1}^{k=n}(x_{k+1} - x_{k-1})d_k^2$$

$$\sum_{k=1}^{k=n}(d_{k+1}^2 - d_{k-1}^2)y_k = -\sum_{k=1}^{k=n}(y_{k+1} - y_{k-1})d_k^2 \quad ;$$

si troverà :

$$(11) \qquad S' = S + \frac{2S}{b}\left[\beta - \frac{n}{4S} + \frac{b}{a}\left(\alpha - \frac{m}{4S}\right)\right],$$

in cui per sola semplicità è messo

$$(12) \qquad \mp \sum_{k=1}^{k=n}(d_{k+2}^2 - d_{k-1}^2)\, y_k = m; \ \sum_{k=1}^{k=n}(d_{k+1}^2 - d_{k-1}^2)x_k = n.$$

§. III.

Per un dato poligono e un dato sistema di assi, le quantità S, m, n son date: ora se nella formola (11), oltre alla S, si suppone rimaner costanti anche a e b, e quindi la ragione r e la direzione φ della direttrice, allora la differenza S'—S rimarrà costante per tutti quei centri di derivazione, che soddisfanno all'equazione

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} = \text{cost.}$$

ma questa è una retta normale alla direttrice, quindi abbiamo il seguente

Teorema I. — *Per uno stesso poligono derivante, una stessa ragione di derivazione, e una medesima direttrice, la differenza tra la superficie del poligono derivato e quella del derivante rimane costante, mentre il centro di derivazione descrive una retta normale alla direttrice.*

Sieno A (α', β') e A$''(\alpha'', \beta'')$ due diversi centri di derivazione, S', S'' le superficie de'corrispondenti poligoni derivati da un medesimo poligono di superficie S, con una medesima direttrice e una stessa ragione di derivazione; secondo la formola (11), avremo:

$$S' = \frac{2S}{b}\left[\beta' - \frac{n}{4S} + \frac{b}{a}\left(\alpha' - \frac{m}{4S}\right)\right],$$

$$S'' = \frac{2S}{b}\left[\beta'' - \frac{n}{4S} + \frac{b}{a}\left(\alpha'' - \frac{m}{4S}\right)\right],$$

e quindi, sottrando e tenendo presenti le (7), si trae :

$$(13) \qquad S' - S'' = 2S\left(\frac{\alpha' - \alpha''}{a} + \frac{\beta' - \beta''}{b}\right) = \frac{(\alpha' - \alpha'')\cos\varphi + (\beta' - \beta'')\operatorname{sen}\varphi}{\frac{1}{2}r}.S;$$

ma il numeratore di quest' ultima frazione è la proiezione ortogonale di A'A'' sulla direttrice, quindi si ha il seguente

Corollario. — *Qualunque sia la direttrice, la differenza delle superficie di due poligoni, derivati da un medesimo poligono con due diversi centri e con una medesima ragione, sta alla superficie del poligono derivante, come la proiezione della distanza de'centri di derivazione sulla direttrice sta alla metà della ragione di derivazione.*

§. IV.

La stessa formola (11) ci mostra che sarà $S' = S$, indipendentemente da a e b, purchè α e β soddisfacciano l'equazione

$$(14) \qquad \beta - \frac{n}{4S} = -\frac{b}{a}\left(\alpha - \frac{m}{4S}\right);$$

la quale essendo $\frac{b}{a}$ un coefficiente arbitrario rappresenta un punto di coordinate

$$(15) \qquad \alpha_0 = \frac{m}{4S}, \qquad \beta_0 = \frac{n}{4S};$$

quindi ne consegue il seguente

Teorema II. — *Qualunque sieno il poligono derivante, la direttrice e la ragione di derivazione, vi è sempre un centro di derivazione A_0, rispetto al quale il poligono derivato è equivalente al derivante.*

Questo centro lo diremo di derivazione *per equivalenza.*

Applicando le formole (15) al caso d'un triangolo, prendendo per asse del x un lato qualunque del triangolo, e per origine il punto di mezzo di questo lato si trova, secondo la formola (12), $m = 0$, e quindi $\alpha_0 = 0$; laonde

Corollario I. — *In ogni triangolo il centro di derivazione per equivalenza è lo stesso centro del circolo circoscritto.*

Se il poligono derivante è iscrittibile in un circolo, prendendo il centro per origine delle coordinate, le d_k risultano tutte uguali al raggio, e quindi, secondo le formole (12) $m = 0, n = 0$, e per conseguenza ancora $\alpha_0 = \beta_0 = 0$; dunque

Corollario II. — *Se il poligono derivante è iscrittibile in un circolo, il centro di derivazione per equivalenza è lo stesso centro del circolo circoscritto.*

Introducendo nella (11) le α_0, β_0, e rimettendo per a e b i loro valori (7), s'ottiene

$$(16) \qquad S' - S = \frac{(\alpha - \alpha_0)\cos\varphi + (\beta - \beta_0)\operatorname{sen}\varphi}{\frac{1}{2} r} . S,$$

quindi

Corollario III. — *La differenza tra l'area del poligono derivato e quella del derivante sta a questa seconda, come la proiezione della distanza fra il corrispondente centro di derivazione e quello di derivazione per equivalenza sulla direttrice, sta alla metà della ragione di derivazione.*

La (16) dà $S' = S$, se

$$(17) \qquad (\alpha - \alpha_0)\cos\varphi + (\beta - \beta_0)\mathrm{sen}\,\varphi = 0,$$

Inoltre, essendo

$$\frac{d(S'-S)}{d\varphi} = -(\alpha - \alpha_0)\mathrm{sen}\,\varphi + (\beta - \beta_0)\cos\varphi,$$

sarà $\frac{d(S'-S)}{d\varphi} = 0$, se

$$(18) \qquad (\alpha - \alpha_0)\mathrm{sen}\,\varphi - (\beta - \beta_0)\cos\varphi = 0,$$

e però da coteste formole (17) e (18) ne deduciamo il seguente

Corollario IV. — *Rispetto a un centro di derivazione* A, *il poligono derivato risulterà equivalente al derivante, se la direttrice è perpendicolare alla congiungente questo centro con quello di derivazione per equivalenza; e la differenza tra le aree de' detti poligoni sarà massima, se la direttrice è parallela alla medesima congiungente.*

Rimanendo gli stessi tutti gli altri elementi, sia φ' un nuovo angolo tale che $\varphi' = 90° + \varphi$, e sia S'' la superficie del corrispondente poligono derivato; avremo, secondo la formola (16)

$$(19) \qquad S'' - S = \frac{-(\alpha - \alpha_0)\mathrm{sen}\,\varphi + (\beta - \beta_0)\cos\varphi}{\frac{1}{2}r}.S,$$

e quindi, quadrando la (16) e quest'equazione, e addizionando i risultamenti, otterremo:

$$(20) \qquad (S'-S)^2 + (S''-S)^2 = [(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2]\frac{4S^2}{r^2} = \text{cost.};$$

laonde

Corollario V. — *Derivando da un medesimo poligono, di superficie* S, *con un medesimo centro e una stessa ragione di derivazione, ma con due direttrici differenti, due poligoni di superficie* S', S'', *la somma de' quadrati* $(S'-S)^2$, $(S''-S)^2$ *sarà costante, qualunque sieno le due direttrici.*

§. V.

Consideriamo ora tre poligoni derivanti, le cui rispettive superficie sieno S, S', S''; secondo le formole (15), avremo:

$$(21) \qquad \alpha_0 = \frac{m}{4S},\ \beta_0 = \frac{n}{4S};\ \alpha'_0 = \frac{m'}{4S'},\ \beta'_0 = \frac{n'}{4S'};\ \alpha''_0 = \frac{m''}{4S''},\ \beta''_0 = \frac{n''}{4S''},$$

essendo le α'_0, β'_0; α''_0, β''_0; m', n'; m'', n'' quantità analoghe alle α_0, β_0; m, n; e sarà il determinante

$$\sum(\pm mn'S'') = 16\ SS'S''.\sum(\pm 1\ \alpha'_0\beta''_0).$$

Ma supponendo

$$(22)\qquad m = m' + m'',\ n = n' + n'',\ S = S' + S'',$$

si ha $\sum(\pm mn'S'') = 0$, quindi anche $\sum(\pm 1\alpha'_0\ \beta_0'') = 0$. Or questa è la condizione perchè i tre punti (α_0, β_0) (α'_0, β'_0); (α''_0, β''_0) sieno in linea retta, quindi abbiamo il teorema qui appresso:

Teorema III. — *Dividendo, mercè una diagonale, un dato poligono* P *in due altri poligoni* P', P'', *i tre corrispondenti centri di derivazione per equivalenza stanno per dritto.*

Da cotesto teorema combinato col corollario I. del. § prec. risulta il seguente

Corollario I. — *Il centro di derivazione per equivalenza d' un quadrigono è l'intersezione delle due perpendicolari innalzate sulle due diagonali dai loro punti di mezzo.*

Corollario II. — In generale un poligono di un numero impari di lati si può scomporre sempre per mezzo d'una diagonale in un triangolo e in un'altro poligono di $n - 1$ lati; e siccome si possono per un medesimo vertice condurre due diagonali che operino una simile scomposizione, e lo stesso può farsi a qualunque altro vertice; così s'hanno in tutto $2n$ di tali scomposizioni; però, siccome, una medesima diagonale passa per due vertici, così il detto numero dev'esser ridotto a metà, e però il totale numero di scomposizioni veramente distinte è soltanto n. Quando poi il poligono è d'un numero pari n di lati, si può sempre scomporre per mezzo d'una diagonale che passa per due vertici opposti in due altri poligoni dello stesso numero $\frac{n}{2} + 1$ lati, sì che si hanno in questo caso n scomposizioni di questa natura; ma osservando anche qui che i due vertici posti agli estremi d'una medesima diagonale danno la stessa soluzione, così le scomposizioni veramente distinte saranno nel caso attuale soltanto $\frac{n}{2}$.

Posto ciò, nel caso d'un poligono d'un numero impari di lati, il centro di derivazione per equivalenza è l'intersezione di n rette, che sono le congiungenti degli analoghi centri delle due porzioni, in cui può essere scomposto nel modo sopraindicato; e quando il poligono è d'un numero pari di lati le rette che passano pel detto centro sono solamente $\frac{n}{2}$.

Secondo le formole (21) e (22) si ha

$$\alpha'_0 S' + \alpha''_0\ S'' = \alpha_0 S;$$

quindi supponendo per un momento che la retta che passa pe'tre centri A_0, A'_0, A''_0

sia l'asse della x, e l'origine sia il centro A_0 del dato poligono, sarà $\alpha_0 = 0$, e l'equazione ultima dà

$$\alpha'_0 S' + \alpha''_0 S'' = 0; \quad S' : S'' :: \alpha''_0 : -\alpha'_0,$$

e però indipendentemente dal segno si conchiude il seguente

Corollario III. — *Le due porzioni, in che rimane diviso un dato poligono per mezzo d'una diagonale, stanno tra loro nella ragione inversa delle distanze de' rispettivi centri di derivazione per equivalenza dall'analogo centro del poligono dato.*

§. VI.

Congiugnendo l'origine O co'due vertici consecutivi M_k, M_{k+1}, le coordinate $p_{k,k+1}$, $q_{k,k+1}$, del centro del circolo circoscritto al triangolo OM_kM_{k+1} saranno date dalle formole seguenti:

$$(23) \quad p_{k,k+1} = \frac{1}{2}\frac{d_k^2 y_{k+1} - y_k d_{k+1}^2}{x_k y_{k+1} - y_k x_{k+1}}, \qquad q_{k,k+1} = -\frac{1}{2}\frac{d_k^2 x_{k+1} - x_k d_{k+1}^2}{x_k y_{k+1} - y_k x_{k+1}}.$$

Ora le formole (15), tenendo presenti i significati di m ed n espressi nelle (12), e quello di S dato dalla (9), possono essere scritte eziandio al modo qui appresso:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\frac{\sum_{k=1}^{k=n}(d_k^2 y_{k+1} - y_k d_{k+1}^2)}{\sum_{k=1}^{k=n}(x_k y_{k+1} - y_k x_{k+1})}, \quad \beta_0 = -\frac{1}{2}\frac{\sum_{k=1}^{k=n}(d_k^2 x_{k+1} - x_k d_{k+1}^2)}{\sum_{k=1}^{k=n}(x_k y_{k+1} - x_k y_{k+1})};$$

e però sostituendo i precedenti valori (23), in queste ultime formole, e ponendo

$$(24) \qquad x_k y_{k+1} - y_k x_{k+1} = m Q_{k,k+1},$$

essendo m una costante, otterremo

$$(25) \qquad \alpha_0 = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} Q_{k,k+1} p_{k,k+1}}{\sum_{k=1}^{k=n} Q_{k,k+1}}, \qquad \beta_0 = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} Q_{k,k+1} q_{k,k+1}}{\sum_{k=1}^{k=n} Q_{k,k+1}};$$

e da coteste formole si trae il teorema qui appresso:

Teorema IV. — *Se nel piano d'un poligono si prenda dovunque un punto O, e si congiunga coi sussecutivi vertici M_1, M_2 ... M_n del dato poligono; se inoltre a ciascun triangolo OM_1M_2, ec. si circoscriva il corrispondente circolo, e ai centri si applichino pesi* (in generale forze parallele) *proporzionali alle aree de' rispettivi triangoli iscritti; il centro di derivazione per equivalenza del dato poligono sarà il centro di gravità di quel sistema di pesi.*

§. VII.

Lo stesso procedimento analitico fin qui adoperato può ben servire a dimostrare gl'indicati teoremi del prof. Padula; alcuni dei quali si scostano alquanto dai precedenti per virtù della differenza nella derivazione. Ne confronteremo brevemente taluni, e vedrem pure a quali altre conseguenze si giunga; ma prima di ogn'altro richiameremo la maniera di derivare considerata dal sullodato Professore, la quale dinoteremo col simbolo (P) e che si scosta dalla nostra che indicheremo con (R), solo pel modo di determinare, sulle parallele alla direttrice, i vertici del poligono derivato; imperocchè secondo la derivazione (R), questi vertici si assegnano staccando sulle dette parallele, e a partire dai vertici del poligono derivante, dei semmenti proporzionali ai quadrati delle distanze di questi medesimi vertici dal centro di derivazione; laddove che, secondo la derivazione (P), i detti semmenti devono esser tagliati a partire dai punti in cui le parallele alla direttrice, sono rispettivamente incontrate da una normale comune (ved. A. di S. F. e M. t. V. pag. 286.).

Ora ritenendo le medesime denominazioni adottate in questa nota, le coordinate t_k, u_k del vertice N_k del poligono derivato sono espresse da

$$(26)\quad \begin{cases} t_k = \dfrac{1}{a}\,(d_k^2 + \delta^2 - 2\alpha x_k - 2\beta y_k) - \lambda\,\dfrac{y_k - \lambda x_k}{1+\lambda^2} \\[2ex] u_k = \dfrac{1}{b}\,(d_k^2 + \delta^2 - 2\alpha x_k - 2\beta y_k) + \dfrac{y_k - \lambda x_k}{1+\lambda^2} \end{cases}$$

e con ciò, dinotando con S_1 la superficie del poligono derivato, calcolata colla formola (10), e tenendo presenti le formole (7) e quelle in principio del §. II. si trova:

$$(27)\qquad S_1 = \frac{2S}{b}\left[\beta - \frac{n}{4S} + \frac{a}{b}\left(\alpha - \frac{m}{4S}\right)\right].$$

Or paragonando cotesta formola con la (11) si fa chiaro in che stia la concordanza o la differenza nell'enunziato dei teoremi del Prof. Padula e dei nostri.

Il centro A_0, determinato dalle formole (15), è identico nelle due derivazioni, se non che nella derivazione (P) il detto centro da'*poligoni derivati nulli*, mentre nella derivazione (R) li dà *equivalenti al poligono derivante.*

Il cor: III, teor: II. si modifica, nella prima derivazione, al modo seguente: *l'area del poligono derivato, rispetto a un punto* A, *sta a quella del poligono derivante come la proiezione di* AA_0 *della direttrice sta alla metà della ragione di derivazione.*

E però paragonando il detto cor: III. con quest'ultimo del Padula ne deduciamo la proposizione seguente: *se da un medesimo poligono di superficie* S *e con una stessa direttrice, una medesima ragione, e uno stesso centro di derivazione si deri-*

vano due poligoni, l'uno S_1, *secondo la derivazione* (P), *l'altro* S' *secondo la derivazione* (R) *la differenza* $S' - S = S_1$.

Le formole (26) poi mostrano facilmente il seguente corollario che ha luogo nella derivazione (P); cioè, *quando il poligono derivante e iscrittibile, il derivato di area nulla ha i suoi vertici collocati in una retta normale alla direttrice.*

In effetti, prendendo per asse della x una parallela alla direttrice, con che $\lambda = 0$, $b = \infty$; e prendendo per origine il centro del circolo che è centro della derivazione nulla quelle formole riduconsi a $t_k = \frac{\rho^2}{a}$, $u_k = y_k$, essendo ρ il raggio del circolo.

Similmente in questa derivazione (P) *i vertici di un quadrigono derivato da un altro quadrigono, rispetto a un qualunque centro di derivazione* A, *sono allocati su due parallele, quando la direttrice è normale ad* AA_0.

Imperocchè, analogamente al corollario III. §. II. la superficie del quadrigono in questo caso è nulla; ma essa è dinotata da

$$(t_1 - t_3)(u_2 - u_4) - (u_1 - u_3)(t_2 - t_4) = 0,$$

e questa equazione mostra la verità dell'enunziato.

Lasciamo da parte ogni altro confronto, e rimandiamo al citato vol. V degli annali di S. F. e M. per quelle osservazioni che riguardino l'uso del teorema IV. (§. V.).

§. VIII.

Se nel poligono derivante supponiamo un vertice variabile, mentre i rimanenti restan fissi il centro di derivazione A_0 (nulla o per equivalenza) andrà anch'esso variando di posizione; e si può cercare il luogo che descrive, mentre il vertice variabile, che supponiamo sia (x_1, y_1) si muove anch'esso sopra una data linea

$$(28) \qquad \varphi(x_1, y_1) = 0.$$

È chiaro che per risolvere questo problema bisognerà trovare le coordinate di A_0, che dinoteremo con t ed u, in funzione di x_1, y_1, e quindi combinare tali espressioni di t ed u con la (28) per eliminarne x_1, y_1. Ora per aversi le espressioni di t ed u in funzione di x_1, y_1 può farsi in due modi, sia partendo dalle formole (15), sia facendo uso del cor: III, §. IV: noi ci atterremo a questa seconda maniera.

Pertanto avendo supposto il vertice $M_1(x_1, y_1)$ variabile, il triangolo $M_1 M_2 M_n$ sarà variabile, mentre il rimanente poligono $M_2 M_3 \dots M_n$ sarà costante. Prendasi per origine delle coordinate il vertice M_2, per asse della x la retta $M_2 M_n$, e si dinotino con s l'area del poligono fisso $M_2 M_3 \dots M_n$, con α, β le coordinate del suo centro di derivazione A_0; e con a la distanza, o diagonale $M_2 M_n$.

Il centro di derivazione A_0 del triangolo variabile $M_1 M_2 M_n$ essendo il centro del circolo circoscritto (cor: I, teor. II, §. III) le sue cordinate saranno

$$\frac{1}{2}a, \quad \frac{y_1^2 + x_1^2 - a x_1}{2y_1},$$

e comechè la distanza di questo centro dal centro variabile (t, u) deve stare a quella del centro (α, β) al medesimo centro (t, u) nella inversa ragione della superficie $\frac{1}{2}ay_1$ del triangolo a quella della superficie s del poligono $M_2 M_3 \ldots M_n$; e siccome inoltre tutti e tre questi centri stanno per dritto (teor. III, §. IV.) così le coordinate t, ed u saranno espresse come segue

$$(29) \qquad \begin{cases} t = \dfrac{a^2y_1 \pm 4\alpha s}{2ay_1 \pm 4s}, \\[2ex] u = \dfrac{a(y_1^2 + x_1^2 - ax_1) \pm 4\beta s}{2ay_1 \pm 4s}, \end{cases}$$

Posto ciò supponiamo, il vertice (x_1, y_1) muoversi sopra una retta $y = \lambda x + \mu$: l'equazione (28) sarà in tal caso

$$(30) \qquad y_1 = \lambda x_1 + \mu;$$

sicchè bisognerà eliminare x_1, y_1 fra le (29) e (30), il che s'ottiene agevolmente; imperocchè la prima (29) messovi in luogo di y_1 il suo valore (30), e risolutala rispetto ad x_1, dà

$$x_1 = -\frac{a\mu(a - 2t) \pm 4s(\alpha - t)}{a\lambda(a - 2t)};$$

e la seconda (29) con la medesima sostituzione e risoluzione, dà:

$$a(1 + \lambda^2)x_1^2 + a[2\lambda(\mu - u) - a]x_1 + a\mu(\mu - 2u) \pm 4s(\beta - u) = 0,$$

e sostituendo in quest'ultima equazione il precedente valore di x_1 si giugne ad una equazione alla quale si può dare la forma seguente:

$$(30) \left\{ \begin{array}{c} (1 + \lambda^2)\,[a\mu(a - 2t) \pm 4s(\alpha - t)]^2 \\ -a\lambda(a-2t)[(\lambda a\mu^2 - a^2\mu - 4\lambda\beta s)(a-2t) \pm 4s(a - 2\lambda\mu)(\alpha - t) + 4\lambda s(2\alpha - a)u] \end{array} \right\} = 0,$$

che rappresenta un'iperbola di cui un asintoto ha per equazione $t = \frac{1}{2}a$, ed è perciò la retta normale alla diagonale $M_2 M_n$ e passa sul punto di mezzo di questa diagonale; quindi si ha il seguente

Teorema. — *Essendo dato un poligono di cui un vertice si muova lungo una retta, mentre gli altri rimangono fissi, il centro di derivazione* A_0 *descrive un'iperbola.*

Osservazioni. — L'equazione (30), allorchè $\alpha = \frac{1}{2}a$, il che ha luogo quando la porzione fissa del poligono è iscrittibile in un circolo, diviene della forma

$$\{(1 + \lambda^2)(a\mu + 2s)^2 - a\lambda[\lambda a\mu^2 - a^2\mu - (2\beta + 2\lambda\mu - a)2s]\}\,(a - 2t)^2 = 0,$$

e quindi rappresenta una retta $t = \frac{1}{2}a$, che è la bisegante normalmente la diagonale $M_2 M_n$; quindi l'iperbola del teorema precedente, è in questo caso, una retta.

Ed è pure una retta parallela a quella ora trovata, quando il vertice mobile scorre sopra una parallela alla diagonale $M_2 M_n$ com'è agevole il verificare; imperocchè basta porre nella (30) $\lambda = 0$, e si ha subito

$$a\mu(a - 2t) + 4s(\alpha - t) = 0.$$

IX.

Passiamo ora a un'altra maniera di derivazione, supponendo dato un'poligono derivante, un centro A, e una ragione a di derivazione; indi congiunto il vertice M_k col centro A, e menata per M_k la perpendicolare ad AM_k, si tagli su questa una porzione $M_k N_k = a.\ AM_k$; e facendo la medesima costruzione per ogni vertice del poligono dato, e prendendo i semmenti $M_k N_k$ sempre nel medesimo senso, s'avrà un nuovo poligono derivato dal dato.

Ritenute le medesime denominazioni precedenti, l'equazione della retta condotta pel vertice $M_k(x_k, y_k)$ perpendicolarmente ad AM_k sarà

$$y - y_1 = -\frac{x_1 - \alpha}{y_1 - \beta}(x - \alpha),$$

e inoltre

$$AM_k = \sqrt{(x_1 - \alpha)^2 + (y - \beta)^2},$$

$$M_kN_k = \frac{(t_1 - x_1)\sqrt{(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2}}{y_1 - \beta} = -\frac{(u_1 - y_1)\sqrt{(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2}}{x_1 - \alpha};$$

quindi, secondo le condizioni del problema

$$\frac{t_1 - x_1}{y_1 - \beta} = -\frac{u_1 - y_1}{x_1 - \alpha} = a, \tag{31}$$

da cui si trae

$$t_1 = x_1 + a(y_1 - \beta); \qquad u_1 = y_1 - a(x_1 - \alpha);$$

e messi questi valori nella (10), e riducendo in virtù delle prime formole del §. II e della (9), avremo

$$S' = (1 + a^2)S. \tag{32}$$

Cotesto risultamento, che ci mostra essere la *superficie del poligono derivato proporzionale a quella del derivante, qualunque sia il centro di derivazione*, ci sembra molto importante per la valutazione delle superficie terminate da quelle curve che si deducono, secondo l'indicata derivazione da altre curve, di cui si conosce la quadratura. Così se la curva derivante è un circolo di raggio r, e il centro di derivazione è lo stesso centro del circolo, si trova agevolmente che la curva derivata è un'altro

circolo concentrico al dato, e di raggio $r\sqrt{1+a^2}$; il che conduce ad un'espressione per la superficie di questo secondo circolo, la quale conferma la formola (32).

Nel caso più generale che il centro di derivazione non fosse il centro stesso del circolo derivante, ma un punto di coordinate α, β, l'equazione della curva derivata è la seguente del 6.° grado

$$(33) \quad \left.\begin{array}{l} [(t^2+u^2+c^2)(\beta+u)+2(\alpha t+\beta u+r^2)(a^2\beta-u)]^2 \\ +[(t^2+u^2+c^2)(\alpha+t)+2(\alpha t+\beta u+r^2)(a^2\alpha-t)]^2 \end{array}\right\} = 4(1+a^2)r^2(\alpha u-\beta t)^2,$$

in cui

$$(34) \qquad c^2 = (1-a^2)r^2 - a^2(\alpha^2+\beta^2).$$

Allorchè $\alpha = \beta = 0$, la (33) si scinde nelle tre seguenti equazioni

$$t^2+u^2 = 0, \qquad t^2+u^2-(1+a^2)r^2 = 0, \qquad t^2+u^2-(1+a^2)r^2 = 0,$$

la prima delle quali dà lo stesso centro del circolo, ed è estranea alla questione; le altre due coincidono in dare il sopraindicato circolo concentrico al derivante.

Secondo la formola (32) dopo n sussecutive derivazioni, restando la stessa la ragione a, la superficie $S^{(n)}$ del poligono derivato diviene $(1+a^2)^n$ volte quella del dato; e se $a = 1$, risulta $S^{(n)} = 2^n.S$.

Se i vertici del poligono dato si trovano allocati in una retta R, allora $S=0$, secondo la (32) anche $S'=0$: in questo caso i vertici del poligono derivato pur essi si trovano in una seconda retta R'; imperocchè dovunque si prendano tre punti sulla retta R, s'avrà sempre un triangolo derivato nullo, e quindi tre punti corrispondenti posti anch'essi per dritto. Da ciò deduciamo il seguente

Teorema I. — *Se intorno ad un punto qualunque* A *si fa ruotare una retta* B, *la quale incontri una retta fissa* R, *e da ciascun punto d'incontro* C *si meni al corrispondente raggio* AC *la normale* CC'= a. AC, *sempre nel medesimo senso; il luogo di* C' *sarà una seconda retta* R'.

Anzi, potendo prendere le indicate normali in un senso e nell'opposto, rispetto a ciascun raggio, così si ha una seconda retta analoga alla R'.

Ora è chiaro che la normale CC' inviluppa una parabola, che ha per fuoco A, per asse la perpendicolare menata da questo punto sulla retta R, e questa retta per tangente al vertice; quindi si può stabilire il teorema qui appresso.

Teorema II. — *Se dal fuoco d'una parabola si menano le perpendicolari alle tangenti, e su ciascuna tangente, a partire dal piede, si tagliano, ne' due sensi, due porzioni eguali e ciascuna proporzionale alla lunghezza della rispettiva perpendicolare; il luogo geometrico degli estremi di quelle porzioni è il sistema di due rette simmetricamente disposte rispetto all'asse della parabola.*

(*Sarà continuato*).